

Intégrale bivariée ⇨

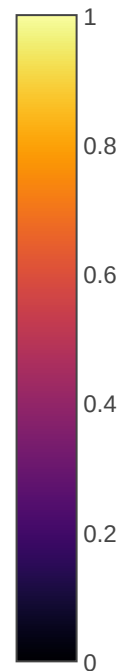
Nous avons vu comment les dérivées univariées étaient généralisées aux dérivées multivariées via les dérivées partielles. Nous avons ensuite implémenté le calcul de dérivées automatique. Pour les intégrales, nous allons nous limiter au cas bivarié car la méthode est essentiellement graphique et elle devient donc plus compliquée à plus de 2 variables.

Exemple introductif ⇨

Considérons le calcul de l'intégrale

$$\int_{x \in [0,1], y \in [0,1]} xy \, dx \, dy$$

Ceci correspond à calculer le volume sous la surface suivante dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.



```
1 let
2   plotly()
3   x = range(0, stop=1, length=10)
4   surface(x, x, (x, y) -> x * y)
5 end
```



```
Precompiling PlotlyBase...
3785.4 ms ✓ PlotlyBase
1 dependency successfully precompiled in 4 seconds. 47 already precompiled.
Precompiling PlotlyKaleido...
480.6 ms ✓ PlotlyKaleido
1 dependency successfully precompiled in 1 seconds. 30 already precompiled.
```



Pour le calcul de dérivées multivarié, on s'est ramené au cas univarié en considérant les dérivées partielles. Dans une dérivée partielle, une seule des variable était considérée comme "variable" et les autres étaient considérées comme "constantes". Pour les intégrales, on procéder de façon similaire. On va se ramener à des intégrales univariées où une seul des variables sera intégrée et les autres seront considérées comme constantes. En prenant l'interprétation géométrique du calcul de volume sous une surface, on voit qu'intégrer d'abord en x puis en y ou en y puis en x devrait donner le même résultat. Intégrons par exemple d'abord en x . Comme y est constant, on peut le sortir de l'intégrale en x :

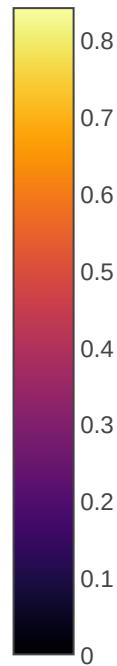
$$\begin{aligned}
\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 xy \, dx \, dy &= \int_{y=0}^1 y \int_{x=0}^1 x \, dx \, dy \\
&= \int_{y=0}^1 y [x^2/2]_{x=0}^1 \, dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{y=0}^1 y \, dy \\
&= \frac{1}{2} [y^2/2]_{y=0}^1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Changer l'ordre pour se simplifier la vie ⇔

Bien que le choix d'ordre de l'intégrale ne change pas le résultat, un ordre peut être plus facile à intégrer qu'un autre! Considérons par exemple l'intégrale suivante:

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 x \sin(xy) \, dx \, dy$$

Ceci correspond à calculer le volume sous la surface suivante dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.



```
1 let
2   plotly()
3   x = range(0, stop=1, length=10)
4   surface(x, x, (x, y) -> x * sin(x * y))
5 end
```

Trouver la primitive de $x \cos(xy)$ par rapport à x n'est pas évident 😞 Essayons d'inverser l'ordre d'intégration:

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 x \sin(xy) \, dy \, dx$$

On peut sortir x parce qu'il ne dépend pas de y :

$$\int_{x=0}^1 x \int_{y=0}^1 \sin(xy) \, dy \, dx$$

On doit maintenant trouver la primitive de $\cos(xy)$ par rapport à y , c'est plus facile 😊

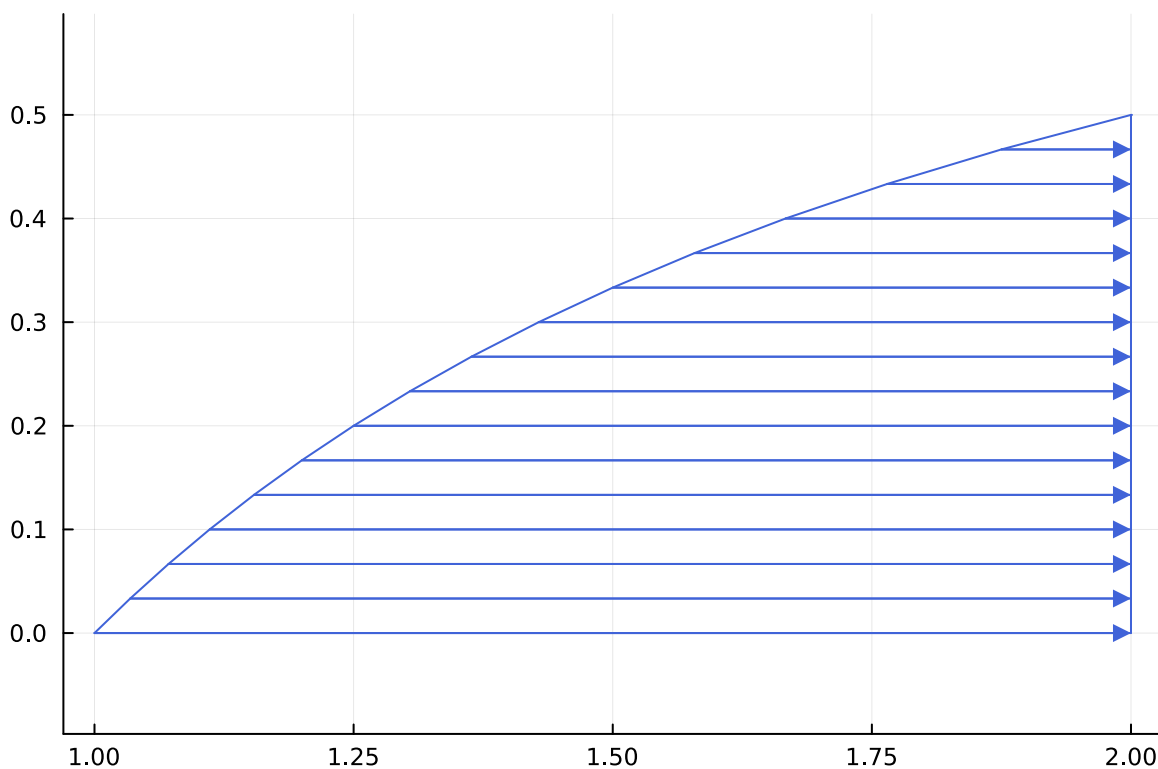
$$\begin{aligned}
 \int_{x=0}^1 x[-\cos(xy)/x]_{y=0}^1 dx &= \int_{x=0}^1 x(-\cos(x)/x + 1/x) dx \\
 &= \int_{x=0}^1 1 - \cos(x) dx \\
 &= [x - \sin(x)]_{x=0}^1 \\
 &= 1 - \sin(1)
 \end{aligned}$$

Intégrer avec bornes ⇔

Supposons maintenant qu'on doive intégrer avec des bornes en y qui dépendent de x .

$$\int_{y=0}^{1/2} \int_{x=1/(1-y)}^2 x \sin(xy) dx dy$$

Le domaine en (x, y) a maintenant la forme ci-dessous et il faut calculer le volume entre cette forme et la surface définie par la fonction $x \sin(xy)$.



```
1 dessin(y -> 1 / (1 - y), 2, 0, 0.5)
```

Le principe reste le même que pour les intégrales à bornes constantes, la seule différence c'est qu'on évalue la primitive à des valeurs qui ne sont pas constantes. Seulement, on se retrouve à nouveau à devoir calculer la primitive de $x \sin(x)$ qui n'est pas évidente. Comme précédemment, on va profiter de cette occasion pour illustrer le changement d'ordre dans les intégrales.

Mais comment faire ici avec les bornes de y qui dépendent de x ? En regardant le graphe ci-dessus, on voit que les valeurs de x vont de **1** à **2**. Pour un certain x , les valeurs de y vont de **0** jusqu'à la courbe $x(y) = 1/(1 - y)$. Comme on a la valeur de x en fonction de y pour cette courbe et non l'inverse, on va devoir l'inverser:

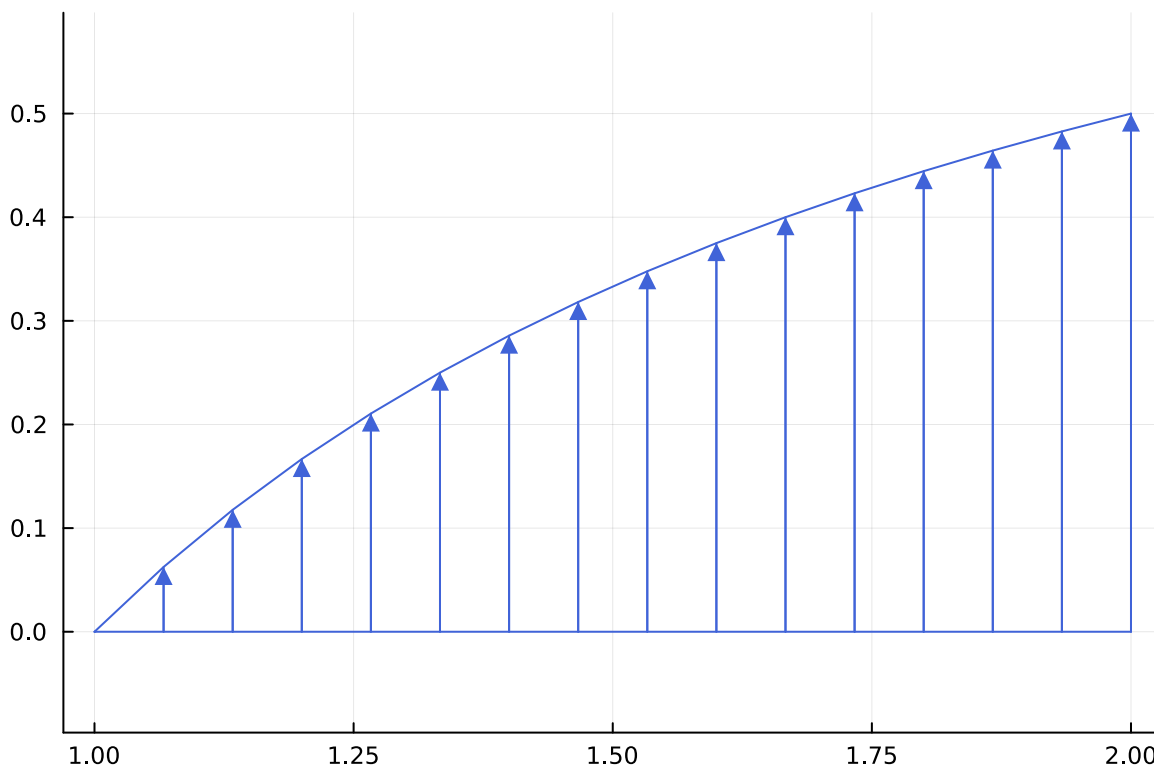
$$x = \frac{1}{1 - y}$$

$$\frac{1}{x} = 1 - y$$

$$y = 1 - \frac{1}{x}.$$

On peut donc réécrire l'intégrale comme suit:

$$\int_{x=1}^2 \int_{y=0}^{1-1/x} x \sin(xy) \, dy \, dx$$



1 `dessin(1, 2, 0, x -> 1 - 1/x)`

On peut maintenant dérouler le calcul de l'intégration:

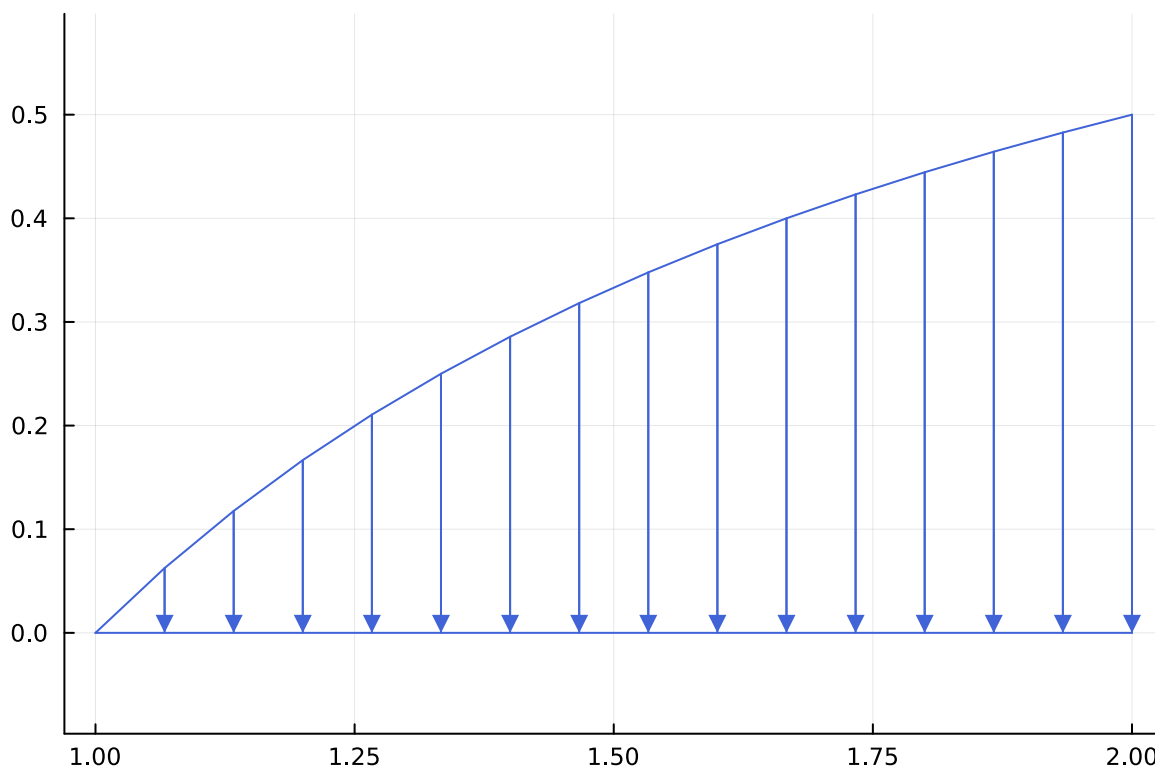
$$\begin{aligned}
 \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^{1-1/x} x \sin(xy) \, dy \, dx &= \int_{x=1}^2 x [-\cos(xy)/x]_{y=0}^{1-1/x} \, dx \\
 &= \int_{x=1}^2 x(1/x - \cos(x-1)/x) \, dx \\
 &= \int_{x=1}^2 1 - \cos(x-1) \, dx \\
 &= [x - \sin(x-1)]_{x=1}^2 \\
 &= 2 - \sin(1) - 1 + \sin(0) \\
 &= 1 - \sin(1)
 \end{aligned}$$

Point d'attention ⇔

Bornes dans le mauvais sens ⇔

Faites attention au sens de l'intégral ! La borne inférieure doit toujours être inférieure à la borne supérieure. Ici, $1 - 1/x$ est supérieur à 0 car x est supérieur à 1 donc $1 - 1/x$ est bien la borne supérieure. Si les bornes ne sont pas mises dans le bon sens, on obtient l'opposé de l'intégral qu'on

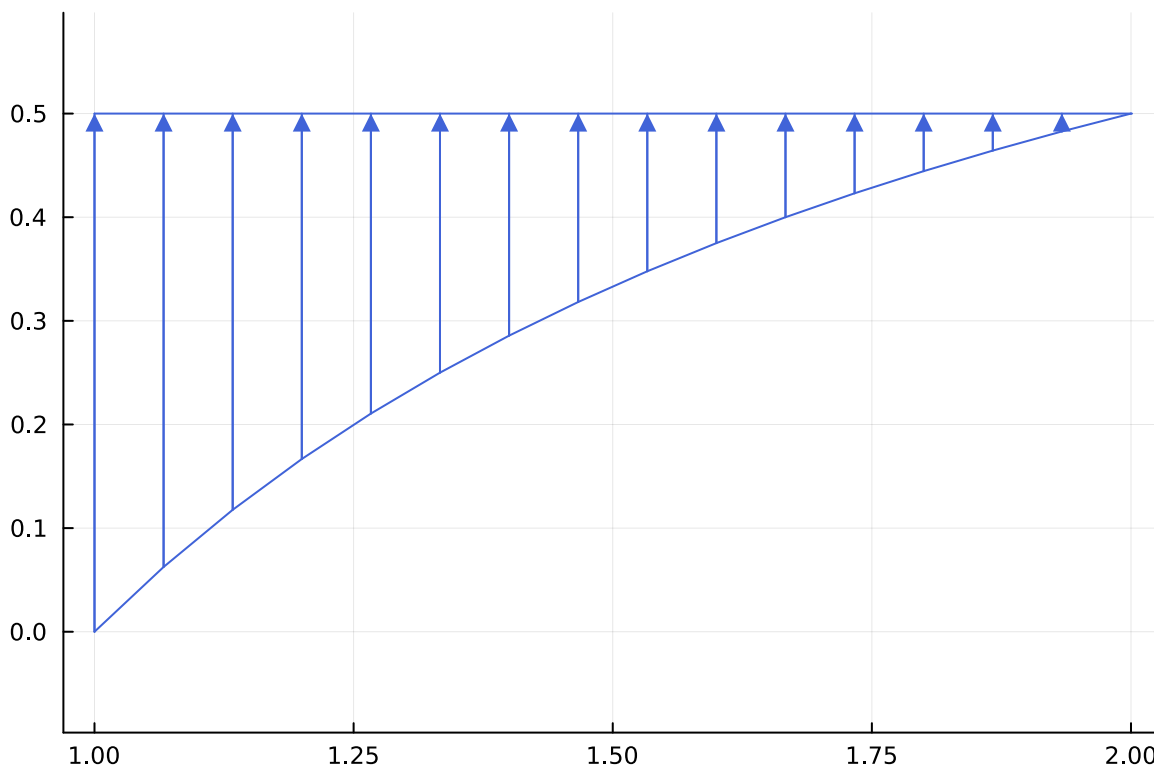
cherche à calculer ! Pour être sûr de ne pas vous tromper, faites le dessin et en vérifiez que les flèches vont bien dans le sens de x (resp. y) croissant. Par exemple, si on met $1 - 1/x$ comme borne inférieure et 0 comme borne supérieure, ça revient à mettre les flèches comme dans le dessin ci-dessous. On voit que les flèches vont vers le bas, ce qui correspond à un sens décroissant pour x , ce qui indique que les bornes sont dans le mauvais sens !



```
1 dessin(1, 2, x -> 1 - 1/x, 0)
```

Mauvais côté de la courbe ⇌

Il faut également faire attention à sélectionner les bonnes bornes. La variable y a initialement comme bornes 0 et $1/2$. Si on prend $1/2$ comme borne, l'intégrale qu'on fait correspond au dessin ci-dessous.



1 `dessin(1, 2, x -> 1 - 1/x, 0.5)`

On voit que les flèches ne sont pas du même côté de la courbe par rapport à l'intégrale initiale. Ces bornes ne calculent donc pas la bonne intégrale!

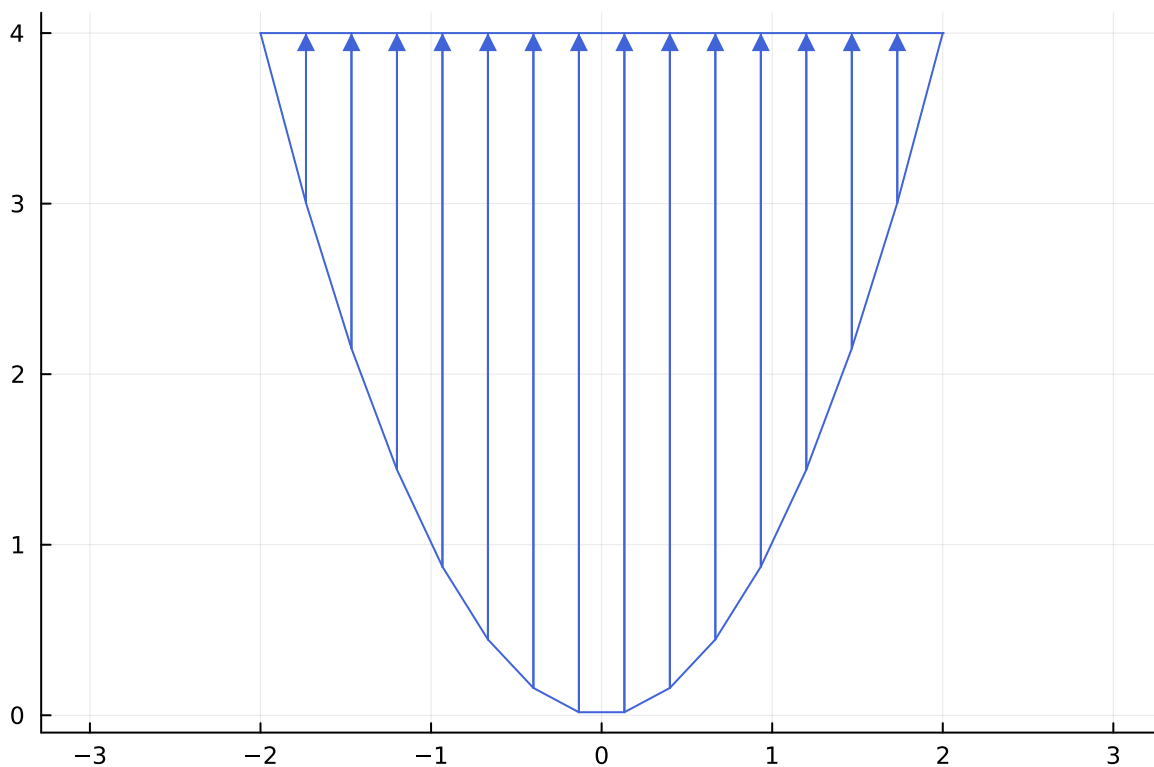
Fonction non-injective ⇔

Lorsqu'on change l'ordre des intégrales, il faut inverser la formule pour avoir l'expression de y en fonction de x depuis l'expression de x en fonction de y . Si la fonction n'est pas injective, elle n'a pas d'inverse unique, que faire ?

Il faut alors décomposer l'intégrale en plusieurs sous-intégrales pour lesquelles la fonction est injective quand elle est restreinte à chaque sous-intervalle. Prenons comme exemple l'intégrale:

$$\int_{x=-2}^2 \int_{y=x^2}^4 f(x, y) \, dy \, dx$$

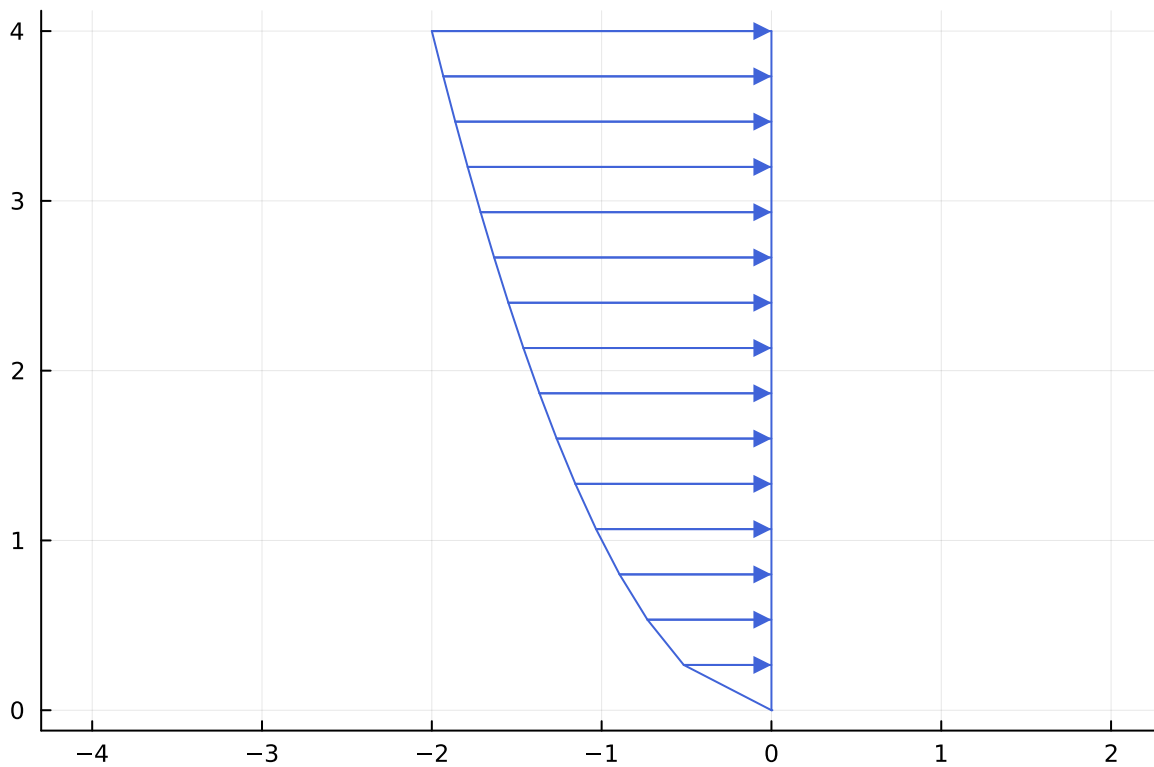
Le dessin correspondant est:



1 `dessin(-2, 2, x -> x^2, 4)`

La fonction $y = x^2$ n'est pas inversible car il y a deux inverses, on a $x = \pm\sqrt{y}$. Si on restreint la fonction pour $x < 0$, on a alors l'inverse unique $x = -\sqrt{y}$. On a donc

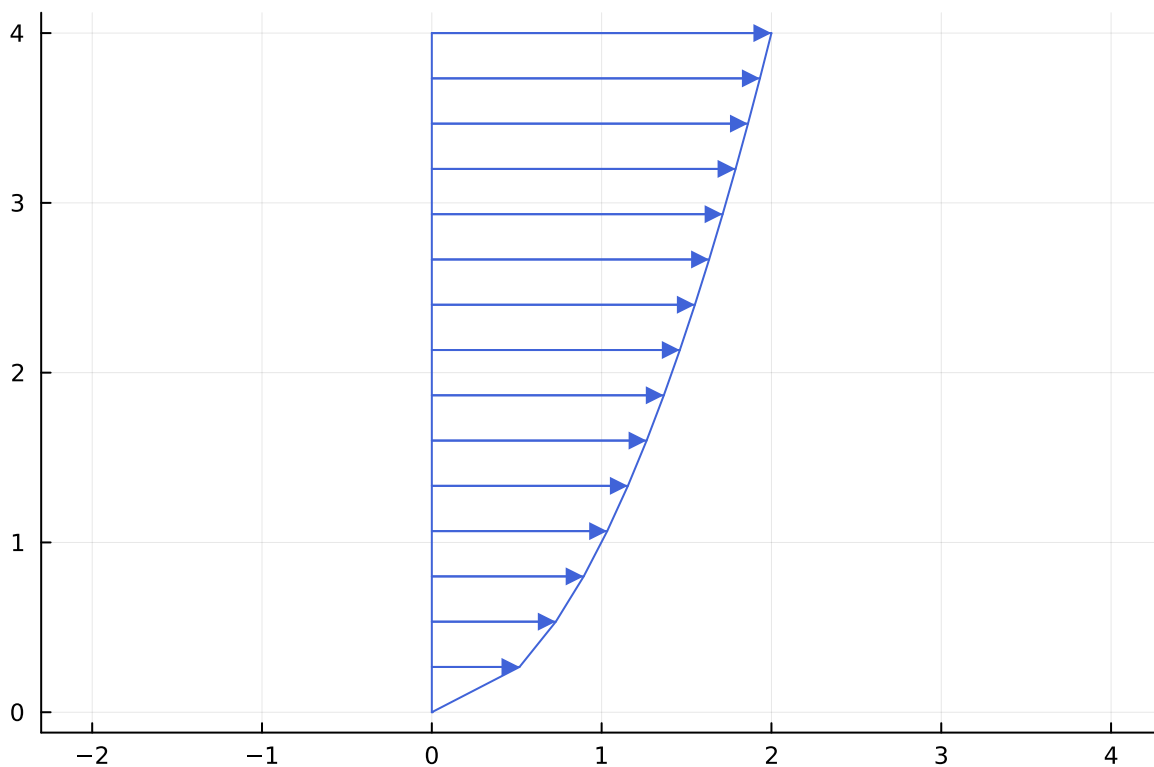
$$\int_{x=-2}^0 \int_{y=x^2}^4 f(x, y) \, dy \, dx = \int_{y=0}^4 \int_{x=-\sqrt{y}}^0 f(x, y) \, dx \, dy$$



1 `dessin(y -> -sqrt(y), 0, 0, 4)`

Similairement, si on restreint la fonction pour $x \geq 0$, on a l'inverse unique $x = \sqrt{y}$. On a donc

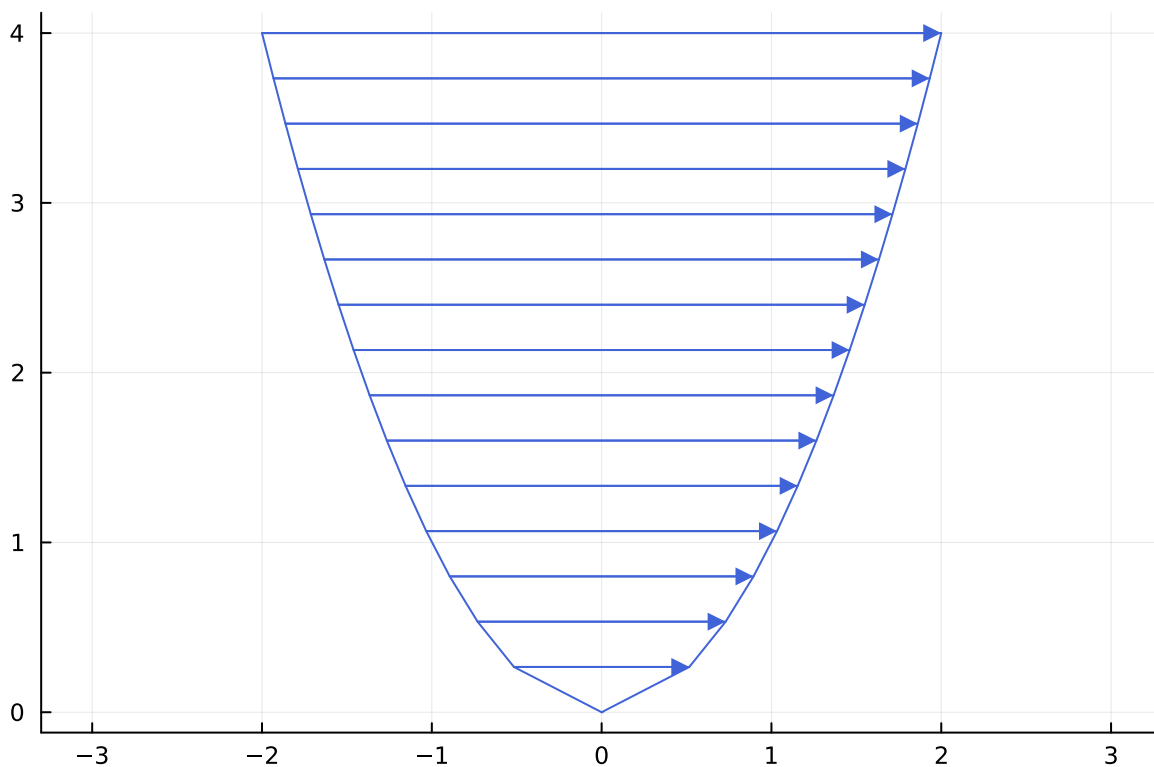
$$\int_{x=0}^2 \int_{y=x^2}^4 f(x, y) \, dy \, dx = \int_{y=0}^2 \int_{x=0}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy$$



```
1 dessin(0, y -> sqrt(y), 0, 4)
```

On peut alors combiner les deux pour donner l'intégrale de -2 à 2 . Dans ce cas particulier, on peut en fait recombinaison les 2 intégrales finales pour avoir une seule intégrale:

$$\begin{aligned}
 \int_{x=-2}^2 \int_{y=x^2}^4 f(x, y) \, dy \, dx &= \int_{x=-2}^0 \int_{y=x^2}^4 f(x, y) \, dy \, dx + \int_{x=0}^2 \int_{y=x^2}^4 f(x, y) \, dy \, dx \\
 &= \int_{y=0}^2 \int_{x=-\sqrt{y}}^0 f(x, y) \, dx \, dy + \int_{y=0}^2 \int_{x=0}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy \\
 &= \int_{y=0}^2 \int_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy
 \end{aligned}$$

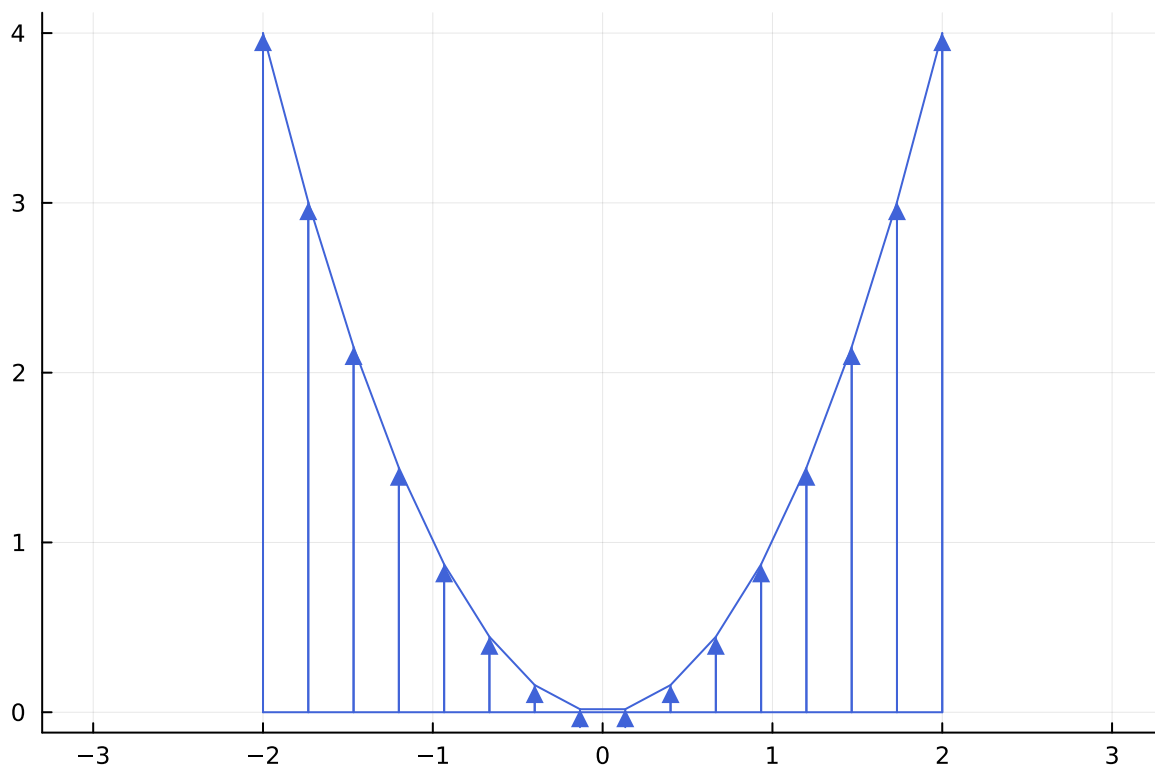


```
1 dessin(y -> -√y, y -> √y, 0, 4)
```

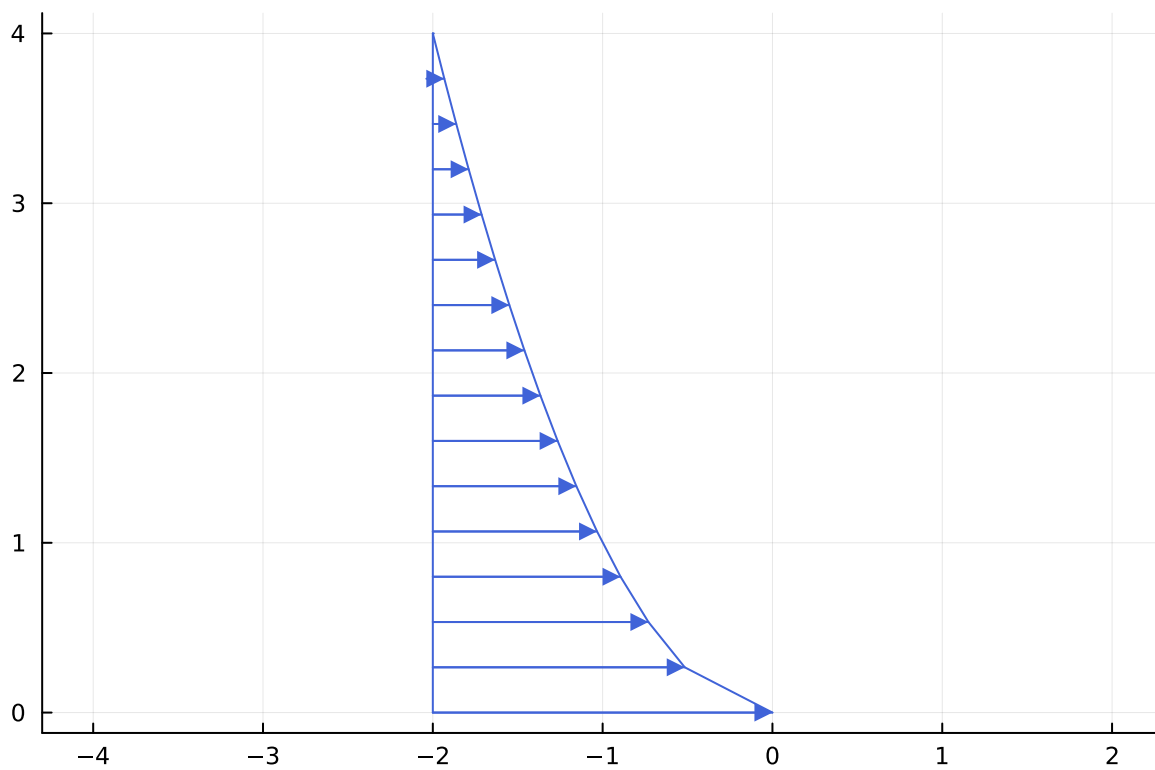
Il se peut aussi qu'on ne puisse pas combiner les intégrales obtenues après avoir été séparées. Par exemple:

$$\begin{aligned} \int_{x=-2}^2 \int_{y=0}^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx &= \int_{x=-2}^0 \int_{y=0}^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx + \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_{y=0}^2 \int_{x=-2}^{-\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy + \int_{y=0}^2 \int_{x=\sqrt{y}}^2 f(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

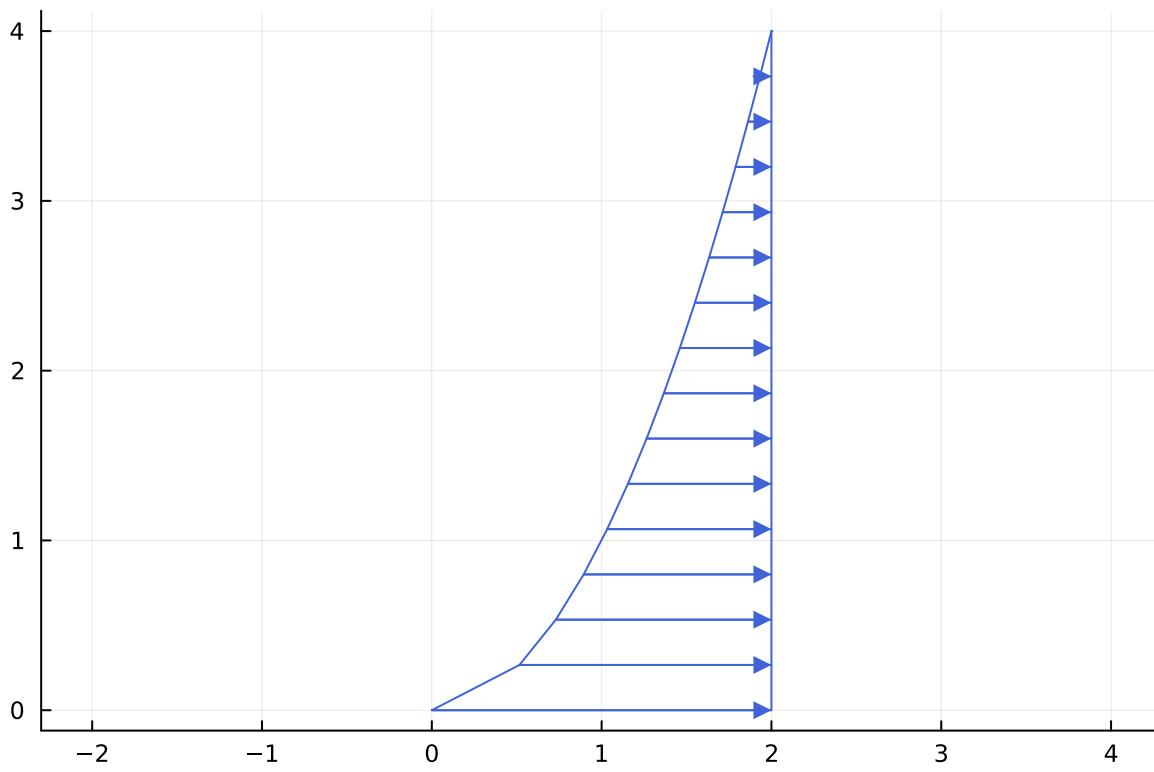
Les dessins correspondants sont:



```
1 dessin(-2, 2, 0, x -> x^2)
```



```
1 dessin(-2, y -> -sqrt(y), 0, 4)
```



```
1 dessin(y ->  $\sqrt{y}$ , 2, 0, 4)
```

Utilitaires ⇄

1 using Plots, Colors

Precompiling Plots...

```
787.5 ms ✓ XML2_jll
928.7 ms ✓ Gettext_jll
1010.0 ms ✓ XSLT_jll
1285.3 ms ✓ Wayland_jll
1000.0 ms ✓ Glib_jll
3708.3 ms ✓ HTTP
1956.8 ms ✓ Xorg_libxcb_jll
4302.5 ms ✓ ColorSchemes
760.6 ms ✓ Xorg_xcb_util_jll
866.1 ms ✓ Xorg_libX11_jll
873.3 ms ✓ Xorg_xcb_util_renderutil_jll
896.6 ms ✓ Xorg_xcb_util_image_jll
960.6 ms ✓ Xorg_xcb_util_keysyms_jll
1112.5 ms ✓ Xorg_xcb_util_wm_jll
860.8 ms ✓ Xorg_libXext_jll
1048.8 ms ✓ Xorg_libXrender_jll
1054.3 ms ✓ Xorg_libXfixes_jll
880.6 ms ✓ Xorg_libxkbfile_jll
837.6 ms ✓ Xorg_libXinerama_jll
1026.3 ms ✓ Xorg_xcb_util_cursor_jll
847.5 ms ✓ Xorg_libXrandr_jll
1593.6 ms ✓ Libglvnd_jll
984.0 ms ✓ Xorg_libXcursor_jll
896.5 ms ✓ Xorg_libXi_jll
1122.4 ms ✓ Cairo_jll
650.6 ms ✓ Xorg_xkbcomp_jll
502.6 ms ✓ Xorg_xkeyboard_config_jll
937.3 ms ✓ HarfBuzz_jll
```

1 import PlotlyBase, PlotlyKaleido

_apply (generic function with 1 method)

1 _apply(x::Function, y) = x(y)

_apply (generic function with 2 methods)

1 _apply(x::Real, _) = x

dessin (generic function with 1 method)

```
1 function dessin(xinf, xsup, yinf, ysup; length = 16, color =  
  Colors.JULIA_LOGO_COLORS.blue)  
2     gr()  
3     p = plot(ratio = :equal)  
4     if xinf isa Real && xsup isa Real  
5         x = range(xinf, stop = xsup; length)  
6         for y in [yinf, ysup]  
7             if y isa Function  
8                 plot!(x, y.(x); label = "", color)  
9             else  
10                plot!([xinf, xsup], [y, y]; label = "", color)  
11            end  
12        end  
13        for x in x  
14            plot!([x, x], [_apply(yinf, x), _apply(ysup, x)]; label = "", color,  
15                arrow = (:closed, 1.0))  
16        end  
17    elseif yinf isa Real && ysup isa Real  
18        y = range(yinf, stop = ysup; length)  
19        for x in [xinf, xsup]  
20            if x isa Function  
21                plot!(x.(y), y; label = "", color)  
22            else  
23                plot!([x, x], [yinf, ysup]; label = "", color)  
24            end  
25        end  
26        for y in y  
27            plot!([_apply(xinf, y), _apply(xsup, y)], [y, y]; label = "", color,  
28                arrow = (:closed, 1.0))  
29        end  
30    end  
31    return p  
32 end
```