UCLouvain Faculté EPL 7 janvier 2026	**Examen : LSINC1113** Compléments de mathématiques	Prénom : Nom : NOMA :

Cet examen est un examen oral qui sera basé sur les questions reprises ci-dessous.

Utilisez les encadrés pour préparer votre réponse orale pendant le temps de préparation.

Bon travail !

Cadre réservé aux notes d'évaluation :

Solution: Evaluation de l'étudiant.

Question 1 : Intégration multivariée

Calculez l'intégrale double suivante :

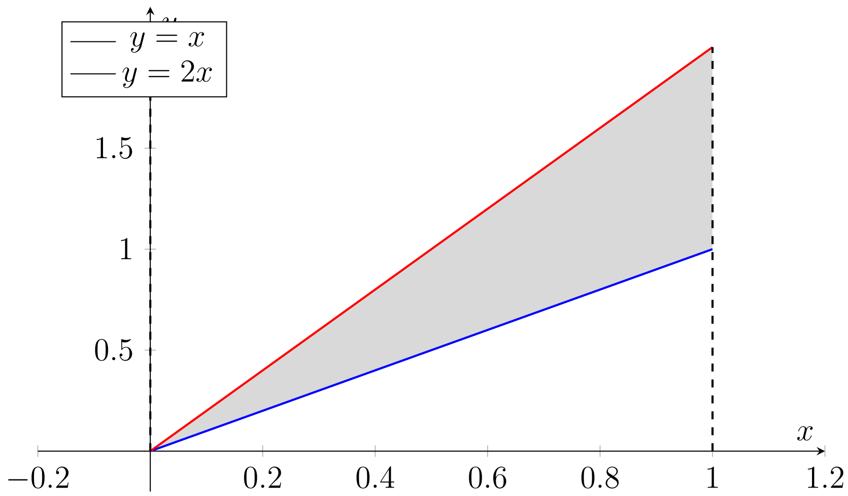
$$\iint_D xy\,dy\,dx$$

où D est le domaine défini par $0 \leq x \leq 1$ et $x \leq y \leq 2x$.

(a) Dessinez le domaine d'intégration D dans le plan (x, y).

Solution: Le domaine D est délimité par :
— $x = 0$ (ligne verticale)
— $x = 1$ (ligne verticale)
— $y = x$ (droite passant par l'origine)
— $y = 2x$ (droite passant par l'origine avec pente 2)

Le domaine est un triangle entre ces lignes pour $x \in [0, 1]$. Pour $x = 0$, on a $y \in [0, 0]$ (un point). Pour $x = 1$, on a $y \in [1, 2]$. Le domaine est la région entre les droites $y = x$ et $y = 2x$ pour $x \in [0, 1]$.



(b) Effectuez le calcul de cette intégrale dans l'ordre $dy\,dx$.

Solution:

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 \int_x^{2x} xy\,dy\,dx$$

Pour l'intégrale intérieure, on intègre par rapport à y en traitant x comme une constante :

$$\begin{aligned}
\int_x^{2x} xy\,dy &= x \int_x^{2x} y\,dy \\
&= x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=2x} \\
&= x \left(\frac{(2x)^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \\
&= x \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = x \cdot \frac{3x^2}{2} = \frac{3x^3}{2}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= \int_0^1 \frac{3x^3}{2}\,dx \\
&= \frac{3}{2} \int_0^1 x^3\,dx \\
&= \frac{3}{2} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

(c) Changez l'ordre d'intégration et recalculez l'intégrale dans l'ordre $dx\,dy$.

Solution: Pour changer l'ordre d'intégration, il faut exprimer le domaine en fonction de y d'abord.
Le domaine D est délimité par :
— $y = x$ (donc $x = y$)
— $y = 2x$ (donc $x = y/2$)
— $x = 0$ et $x = 1$
Pour un y fixé, les bornes en x sont :
— Pour $y \in [0, 1]$: x varie de $y/2$ (ligne $y = 2x$) à y (ligne $y = x$)
— Pour $y \in [1, 2]$: x varie de $y/2$ (ligne $y = 2x$) à 1 (ligne $x = 1$)
Donc :

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{y/2}^{y} xy\,dx\,dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} xy\,dx\,dy$$

Pour la première intégrale ($y \in [0, 1]$) :

$$\begin{aligned}\int_{y/2}^{y} xy\,dx = y \int_{y/2}^{y} x\,dx = y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y/2}^{x=y} \\ = y\left(\frac{y^2}{2} - \frac{(y/2)^2}{2}\right) = y\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{8}\right) = y \cdot \frac{3y^2}{8} = \frac{3y^3}{8}\end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale ($y \in [1, 2]$) :

$$\begin{aligned}\int_{y/2}^{1} xy\,dx = y \int_{y/2}^{1} x\,dx = y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y/2}^{x=1} \\ = y\left(\frac{1}{2} - \frac{(y/2)^2}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{8}\right) = \frac{y}{2} - \frac{y^3}{8}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,dx\,dy &= \int_0^1 \frac{3y^3}{8}\,dy + \int_1^2 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{8}\right)dy \\ &= \frac{3}{8}\int_0^1 y^3\,dy + \frac{1}{2}\int_1^2 y\,dy - \frac{1}{8}\int_1^2 y^3\,dy \\ &= \frac{3}{8}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 - \frac{1}{8}\left[\frac{y^4}{4}\right]_1^2 \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{15}{4} = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Question 2 : Suites récurrentes

Considérez un microbe qui crée 2 nouveaux microbes le premier jour, 1 le deuxième jour et meurt le 3ième jour.

1. Le premier jour, il y a un seul microbe.
2. Le deuxième, il y a 1 microbe d'un jour et 2 nouveaux microbes de 0 jour.
3. Le troisième jour, il y a 1 microbe de 2 jours, 2 microbes d'un jour, 5 microbes de 0 jour.
4. Le quatrième jour, il y a 2 microbes de 2 jours, 5 microbes d'un jour, 12 microbes de 0 jour.

(a) Si vous commencez avec un seul microbe le jour 1, combien y aura-t-il de microbes le 6ème jour ?

Solution: Notons u_n le nombre de nouveaux microbes au jour n.
Analysons la dynamique :
— Chaque microbe créé au jour $n-1$ survit et produit 2 nouveaux microbes
— Chaque microbe créé jour $n-2$ produit encore 1 nouveau microbe
Donc la relation de récurrence est :

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$$

Conditions initiales : $u_1 = 1$, $u_2 = 2$
Calculons successivement :

$$\begin{aligned}
u_3 &= 2u_2 + u_1 = 2(2) + 1 = 5 \\
u_4 &= 2u_3 + u_2 = 2(5) + 2 = 12 \\
u_5 &= 2u_4 + u_3 = 2(12) + 5 = 29 \\
u_6 &= 2u_5 + u_4 = 2(29) + 12 = 70
\end{aligned}$$

Le 6ème jour : $\boxed{70}$ microbes au total.

(b) Plus généralement, combien y aura-t-il de microbes après n jours ?

Solution: Notons u_n le nombre de microbes après n jours.
Conditions initiales : $u_1 = 1$ (un microbe au départ)
Pour trouver une formule générale, nous devons résoudre l'équation de récurrence :

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 = 2r + 1$$

$$r^2 - 2r - 1 = 0$$

En utilisant la formule quadratique :

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Donc $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $r_2 = 1 - \sqrt{2}$.
La solution générale est :

$$u_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$$

En utilisant les conditions initiales $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$:

$$\begin{aligned} u_1 &= A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) = 1 \\ u_2 &= A(1+\sqrt{2})^2 + B(1-\sqrt{2})^2 = 2 \end{aligned}$$

Résolvant ce système, nous obtenons :

$$A = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \quad B = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

Donc la formule générale est :

$$u_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n$$

Question 3 : Mathématiques du signal
Considérons le signal suivant :

$$x(t) = 2\cos(3\pi t) + \sin(6\pi t).$$

(a) Quelle est la transformée de Fourier de $x(t)$? Identifiez les fréquences présentes dans le signal et dessinez le spectre $|X(f)|$.

Solution: Pour trouver la transformée de Fourier de $x(t)$, on utilise les formules classiques :

$$\begin{aligned}\cos(3\pi t) &= \frac{e^{i3\pi t} + e^{-i3\pi t}}{2}\\ \sin(6\pi t) &= \frac{e^{i6\pi t} - e^{-i6\pi t}}{2i}\end{aligned}$$

Donc :

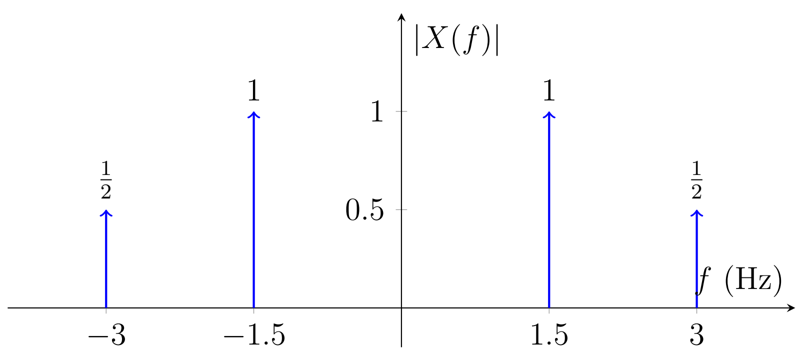
$$\begin{aligned}x(t) &= 2 \cdot \frac{e^{i3\pi t} + e^{-i3\pi t}}{2} + \frac{e^{i6\pi t} - e^{-i6\pi t}}{2i}\\ &= e^{i3\pi t} + e^{-i3\pi t} + \frac{1}{2i}e^{i6\pi t} - \frac{1}{2i}e^{-i6\pi t}\end{aligned}$$

La transformée de Fourier est :

$$X(f) = \delta(f-1.5) + \delta(f+1.5) + \frac{1}{2i}\delta(f-3) - \frac{1}{2i}\delta(f+3)$$

où les fréquences sont $f_1 = 1.5$ Hz (de $\cos(3\pi t)$) et $f_2 = 3$ Hz (de $\sin(6\pi t)$). Le spectre d'amplitude $|X(f)|$ est :

$$|X(f)| = \delta(f-1.5) + \delta(f+1.5) + \frac{1}{2}\delta(f-3) + \frac{1}{2}\delta(f+3)$$



(b) Dessinez le spectre $|X_s(f)|$ du signal échantillonné $x_s(t)$ pour des fréquences d'échantillonnage de $f_e = 5$ Hz et $f_e = 7$ Hz. Que constatez-vous ?

Solution: La fréquence maximale du signal est $f_{max} = 3$ Hz. La fréquence de Nyquist est donc $f_{max} = 3$ Hz, ce qui signifie qu'il faut échantillonner à $f_e > 6$ Hz pour éviter le repliement spectral.

Échantillonnage à $f_e = 5$ Hz :

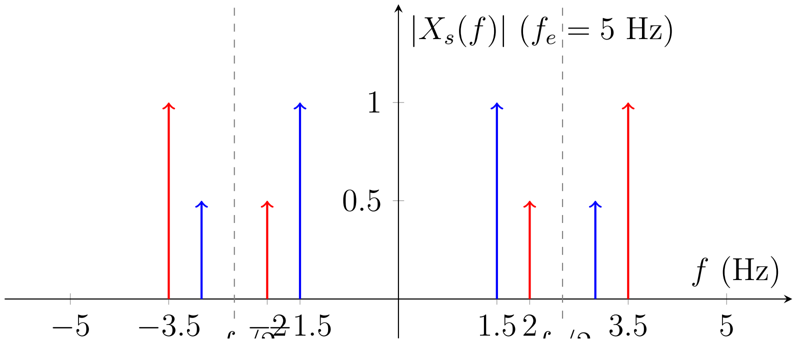
Comme $f_e = 5$ Hz < 6 Hz, il y a repliement spectral. Le spectre se répète périodiquement tous les 5 Hz. La fréquence de Nyquist est $f_e/2 = 2.5$ Hz.

— La fréquence $f = 1.5$ Hz < 2.5 Hz, donc pas de repliement.

— La fréquence $f = 3$ Hz > 2.5 Hz, donc repliement : 3 Hz se replie à $5 - 3 = 2$ Hz.

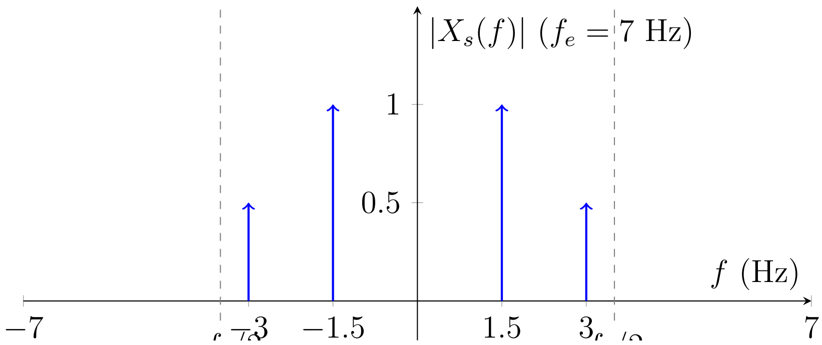
— Les fréquences négatives se replient également : -1.5 Hz se replie à $-1.5 + 5 = 3.5$ Hz, et -3 Hz se replie à $-3 + 5 = 2$ Hz.

Le spectre échantillonné contient des impulsions aux fréquences : -3.5, -2, -1.5, 1.5, 2, 3.5 Hz (et leurs répétitions périodiques tous les 5 Hz).



Échantillonnage à $f_e = 7$ Hz :

Comme $f_e = 7$ Hz > 6 Hz, il n'y a pas de repliement spectral. Le spectre se répète périodiquement tous les 7 Hz sans distorsion.



Conclusion : Avec $f_e = 5$ Hz, on observe un repliement spectral : la fréquence 3 Hz se replie à 2 Hz, créant de la distorsion. Avec $f_e = 7$ Hz, le spectre est préservé sans repliement, confirmant le théorème de Shannon-Nyquist.

Question 4 : Cryptographie

Alice et Bob veulent communiquer de manière sécurisée. Ils utilisent le protocole de Diffie-Hellman pour échanger une clé secrète. Ils choisissent un nombre premier $p = 17$ et une racine primitive $g = 3$ modulo p. Alice choisit un nombre secret a et envoie $A = g^a \mod p$ à Bob. Vous arrivez à intercepter la valeur de A, $A = 7$.

(a) Que valent les puissances g^2, g^3 modulo p ?

> **Solution:** $g^2 = 9$ et $g^3 = 27 \equiv 10 \pmod{17}$.

(b) Quel est l'inverse g^{-1} de g modulo p ?

> **Solution:** $g^{-1} = 6$ car $3 \cdot 6 \equiv 1 \pmod{17}$.

(c) Que valent les puissances g^{-4}, g^{-8}, g^{-12} modulo p ?

> **Solution:**

$$\begin{aligned} g^{-2} &= 6^2 \equiv 36 \equiv 2 \pmod{17} \\ g^{-4} &= 2^2 \equiv 4 \pmod{17} \\ g^{-8} &= 4^2 \equiv 16 \equiv -1 \pmod{17} \\ g^{-12} &= -1 \cdot 4 \equiv 13 \pmod{17} \end{aligned}$$

(d) Que valent les produit Ag^{-4}, Ag^{-8} et Ag^{-12} modulo p ?

> **Solution:**

$$\begin{aligned} Ag^{-4} &= 7 \cdot 4 \equiv 28 \equiv 11 \pmod{17} \\ Ag^{-8} &= 7 \cdot (-1) \equiv -7 \equiv 10 \pmod{17} \\ Ag^{-12} &= 7 \cdot 13 \equiv 91 \equiv 6 \pmod{17} \end{aligned}$$

(e) Quel est le nombre secret a choisi par Alice ?

Solution: $g^3 \equiv 10 \equiv Ag^{-8} \pmod{17}$ donc $g^3 g^8 \equiv 10 \pmod{17}$ donc $g^{11} \equiv 10 \pmod{17}$. Le nombre secret a choisi par Alice est donc 11.

(f) Comment généraliser cet méthode pour des nombre A, g et p quelconques ?

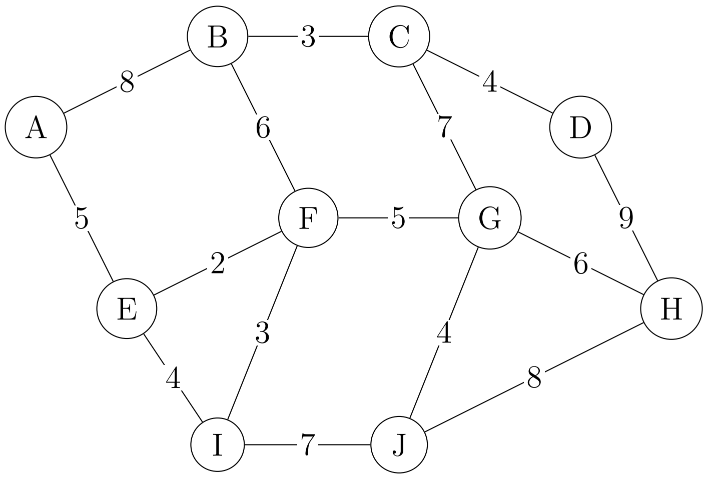
Solution: On peut utiliser l'algorithme de Shanks's Baby-Step Giant-Step pour trouver a. Voir slides.

(g) Quel est la complexité de cette algorithme ? Quel taille de nombre p faut-il pour qu'il soit difficile de trouver a à partir de A, g, p avec un ordinateur personnel ($\pm 10^9$ opérations par secondes) ?

Solution: $\mathcal{O}(\sqrt{(}p)\log(p))$ opérations. Avec 18 chiffres, il faut 10^9 opérations donc juste une seconde, c'est pas assez. Avec 36 chiffres, il faut 10^{18} opérations donc un milliard de secondes soit un peu plus de 30 ans, c'est pas mal.

Question 5 : Théorie des graphes

Après une tempête de neige exceptionnelle, toutes les routes entre les villages de votre région sont enneigées. Vous devez décider quelles routes déneiger pour que tous les villages soient reliés entre eux, tout en minimisant le coût total de déneigement. Le réseau routier est représenté ci-dessous, où chaque nombre indique le coût de déneigement (en milliers d'euros) pour chaque route :



(a) Déterminez manuellement quelles routes déneiger pour que tous les villages soient reliés avec un coût minimal. Indiquez le coût total.

Solution: On cherche un arbre couvrant minimal (minimum spanning tree) qui relie tous les villages.

On peut utiliser l'algorithme de Kruskal (ou Prim) mentalement :

1. Trier les arêtes par coût croissant : $EF(2)$, $BC(3)$, $FI(3)$, $CD(4)$, $EI(4)$, $GJ(4)$, $FG(5)$, $AE(5)$, $CG(7)$, $IJ(7)$, $AB(8)$, $DH(9)$
2. Ajouter les arêtes une par une si elles ne créent pas de cycle :
   — EF (coût 2), BC (coût 3), FI (coût 3), CD (coût 4) - ajouté
   — EI (coût 4) - crée un cycle avec EF et FI, ignoré
   — GJ (coût 4), FG (coût 5), AE (coût 5) - ajouté
   — BF (coût 6), GH (coût 6) - ajouté

L'arbre couvrant minimal contient les arêtes : EF, BC, FI, CD, GJ, FG, AE, BF, GH.

Coût total : $2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 = \boxed{38}$ milliers d'euros.

(b) Considérons maintenant le problème avec un nombre $|V|$ de sommets et $|E|$ d'arêtes bien plus grand, de tel sorte que vous ne sachiez plus le résoudre à la main. Quel algorithme utiliseriez-vous pour trouver les routes à déneiger pour que tous les villages soient reliés avec un coût minimal ? Décrivez brièvement son principe et donnez sa complexité temporelle.

Solution: On utilise l'algorithme de Kruskal (ou l'algorithme de Prim) pour trouver un arbre couvrant minimal.

Algorithme de Kruskal :

1. Trier toutes les arêtes par poids croissant.
2. Initialiser une forêt (chaque sommet est son propre arbre).
3. Pour chaque arête dans l'ordre croissant :
   — Si les deux extrémités de l'arête sont dans des arbres différents, ajouter l'arête et fusionner les deux arbres.
   — Sinon, ignorer l'arête (elle créerait un cycle).
4. S'arrêter quand on a $|V| - 1$ arêtes (un arbre a toujours $|V| - 1$ arêtes).

Complexité :

— Tri des arêtes : $\mathcal{O}(|E| \log |E|)$
— Pour chaque arête, vérifier si elle crée un cycle : $\mathcal{O}(\log |V|)$ avec une structure Union-Find efficace
— Total : $\mathcal{O}(|E| \log |E|) = \mathcal{O}(|E| \log |V|)$ (car $|E| \leq |V|^2$)

Alternative : Algorithme de Prim

— Commencer avec un sommet arbitraire.
— À chaque étape, ajouter l'arête de poids minimal qui connecte un sommet dans l'arbre à un sommet hors de l'arbre.
— Complexité : $\mathcal{O}(|E| + |V| \log |V|)$ avec une file de priorité efficace.